

Összefonódottság észlelése és kvantummetrológia kvantumoptikai rendszerekben

Akadémiai doktori értekezés tézisei

Tóth Géza
Wigner Fizikai Kutatóközpont

Budapest
2019

A kutatások előzménye

A kvantuminformáció-tudomány interdiszciplináris terület, amely magában foglalja a kvantumfizika, a számítástechnika, a mérnöki tudományok és a matematika bizonyos részeit [1]. Egyrészt a kvantuminformáció-tudomány megpróbálja leírni a kapcsolatokat a terület számára fontos mennyiségek között, ahogy a tudomány más területei is. Másrészt az analitikus oldal mellett konstruktív oldala is van. A kvantuminformáció-tudomány számos részterülete olyan kvantumeszközök megalkotását célozza meg, amelyek kvantumos effektusokat felhasználva felülmúlják klasszikus társaikat.

A kvantuminformáció-tudomány nagy része kétállapotú rendszerek, azaz qubitek nem-relativisztikus kvantummechanikáján alapul. A kvantumfizika ezen része közel 100 éves. Bár az elméleti leírás készen volt, hosszú időn keresztül nem figyeltek meg igazi többtest-kölcsönhatáson alapuló kvantumdinamikát. Továbbá, bár a kvantumfizikát a statisztikus fizika, a szilárdtestfizika és az optika területén használták, nagyon gyakran a modell nem tartalmazott részecskék közötti kölcsönhatást. Csak nem olyan régen, az 1980-as évektől vált lehetségessé, hogy két vagy több részecske szabályozott módon kölcsönhatásban álljon egymással egy kísérletben. A legsikeresebb rendszereknek a fotonok, ionok és hideg atomok bizonyultak [2, 3, 4, 5].

A látványos kísérleti eredményekkel egy időben a következő kérdések merültek fel: Mit tehetünk a kvantumeszközökkel? Milyen kvantumállapotok triviálisak és milyen állapotok érdekesek, hasznosak? Milyen kvantumállapotokat lehetetlen létrehozni a gyakorlatban, még akkor is, ha a kvantummechanika megengedi? Milyen közel áll a kísérletileg létrehozott állapot ahhoz az ideális állapothoz, amelyet elő akartunk állítani?

A kvantuminformáció-tudomány nagy része, beleértve az összefonódáselméletet is, e kérdések megválaszolására törekszik. A szilárdtestfizikából és a statisztikus fizikából egyértelmű, hogy a tiszta állapotok között a szorzatállapotok triviálisak, mivel előállíthatóak olyan kvantumdinamikával, amelyben nincs részecskék közti kölcsönhatás, és olyan Hamilton-operátorok alapállapotaként is előállnak, amelyekben nincs kölcsönhatás. Valódi kísérletekben azonban tiszta állapotokkal nem találkozunk, csak kevert állapotokkal. Ezért

általánosítani kellett a szorzatállapotokat. Így definiálták a szeparálható állapotokat, mint szorzatállapotok keverékét [6, 7, 8].

Azokat az állapotokat, amelyek nem szeparálhatóak, összefonódott állapotoknak nevezzük. Több mint két részecske esetén érdemes az összefonódottság különböző szintjeit definiálni. Azt mondjuk, hogy egy tiszta állapot k -előállítható (k -producible), ha a részecskék olyan csoportokra oszthatóak, amelyek k vagy kevesebb részecskét tartalmaznak úgy, hogy a részecskék az egyik csoportban nem hatnak kölcsön a másik csoportban levő részecskékkal. Egy kevert állapot k -előállítható, ha felírható tiszta k -előállítható állapotok keverékeként. Ha egy állapot nem k -előállítható, akkor $(k + 1)$ -részecske összefonódott. N részecske esetén a legmagasabb szint az N -részecske összefonódottság. Ebben az esetben a kvantumrendszer teljesen összefonódott. Ezt valódi többtest-összefonódásnak (genuine multipartite entanglement) is szokták hívni.

Az összefonódott állapotok sok kvantuminformáció-feldolgozási problémában és kvantummetrológiai feladatban hasznosabbak, mint a szeparálhatóak [9, 10]. Másrészt az összefonódottság jelenlétének bizonyítása használható egy kísérlet sikerének jellemzésére. Ha egy több részecskéből álló kvantumállapot létrehozása után sikerül összefonódottságot detektálni, akkor az azt mutatja, hogy az állapot nem jöhetett létre anélkül, hogy a részecskék kvantumos kölcsönhatásba lépjenek egymással. Ilyen kvantumos kölcsönhatást ír le például egy kétrészecskés Ising vagy Heisenberg Hamilton-operátor. Ha sikerül valódi többtest-összefonódást kimutatni, akkor az állapot nem jöhetett úgy létre, hogy a részecskék csak kisebb csoportokon belül álltak kvantumos kölcsönhatásban egymással, míg a csoportok között nem volt kölcsönhatás.

A kísérletekben előállított koherens kvantumrendszerek nagysága gyorsan növekszik. A tízqubites kvantumállapot előállítása után felmerül a kérdés, hogy mi lehetséges a nagy részecske limitben? Például fontos probléma a kvantummetrológiában, hogy mekkora a maximális érzékenység, amely a kísérletekben paraméterbecslésben elérhető. Ha az elmélet által megengedett maximális értéket elérnénk, akkor ez a mérési pontosságot a szokásoshoz képest több nagyságrenddel megnövelné elegendően nagy részecskeszám esetén. Az ehhez szükséges kvantumállapotok nagymértékben összefonódottak.

A gyakorlatban a zajhatások megghiúsíthatják az ilyen állapotok létrehozását.

Ezek alapján fontos feladat az összefonódás jelenlétének bizonyítása valószínű kísérletekben, néhány qubites és sok ezer qubites rendszerekben egyaránt. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ez lehetséges. Egyrészt nincs egy általános módszer, amely eldönti, hogy egy kvantumállapot összefonódott-e, még akkor sem, ha az állapot sűrűségmátrixa ismert. Másrészt a gyakorlatban csak néhány operátort lehet mérni, és ezek a mérések statisztikai zajt is tartalmaznak. Mégis vannak olyan hatékony módszerek, amelyek felhasználhatóak az összefonódottság kimutatására valószínű kísérletekben. Az értekezés ilyen módszerekre koncentrálna.

Célkitűzések

A disszertációban olyan eljárásokat igyekszünk találni, amelyek felismerik az összefonódottságot a különböző fizikai rendszerekben. Megmutatjuk, hogyan lehet kevés méréssel összefonódottságot detektálni bizonyos állapotok közelében. Az ilyen módszerek nagyon fontosak, mivel egy tipikus kísérletben csak néhány mérést végezhetünk.

Először spinrendszereket vizsgálunk, és megmutatjuk, hogyan lehet összefonódottságot detektálni energiaméréssel egy spinrendszer alapállapotának közelében. Ezután olyan módszereket mutatunk be, amelyek összefonódottságot detektálnak a legfontosabb kvantumállapotok, például a Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) állapotok [11], a klaszterállapotok [12], a gráfállapotok és a szimmetrikus Dicke-állapotok közelében. Számos módszerünk optimális abban az értelemben, hogy a minimális mérési erőfeszítésre van hozzájuk szükség.

A sokrészecske-rendszerek összefonódottságának detektálása még bonyolultabb, mivel csak kollektív mennyiségeket tudunk mérni. Az ilyen rendszerek számára is összefonódottsági feltételeket mutatunk be. Célunk az összes ilyen összefonódottsági feltétel meghatározása, vagyis a mi kritériumunk felismeri az összes összefonódott állapotot, amely detektálható a mért mennyiségekkel.

Sok-részecske rendszerek kvantumállapota az összefonódottság kimutatá-

sán kívül jellemezhető kvantumtomográfiával is, habár a szükséges mérések száma igen nagy lehet. Ezért hatékony kvantumtomográfiai módszereket mutatunk be. Ezeket használva a szükséges mérések száma sokkal kisebb, mint ami a teljes kvantumtomográfiához szükséges. A mi eljárásunk is sűrűségmátrixot eredményez, amelyből az összefonódás kimutatható a szakirodalomban szereplő összefonódási kritériumokkal.

Az értekezésben bemutatott legtöbb eredményünket olyan kísérletekben alkalmazták, amelyekben többrészecskés összefonódott állapotokat hoztak létre fotonokkal vagy hideg atomokkal.

Alkalmazott tudományos módszerek

Az értekezés nagy része a kvantuminformáció-tudomány témaköréhez tartozik, különösen az összefonódás elméletéhez. Ezenkívül még kvantummetrológiai problémákkal is foglalkozunk, és különösen a kvantum Fisher-információ elméletét használjuk.

Leginkább analitikus számításokat végzünk. Egy gyakran felmerülő probléma egy kifejezés szorzat állapotokra vonatkozó maximumának megtalálása. Ez a probléma általában nem megoldott, ezért minden esetben más bizonyítást kell találnunk. Az egyszerű numerikus maximalizálás itt nem használható, mivel nem lehetett garantálni, hogy elértük a globális maximumot.

A numerikus számításokhoz legtöbbször az N spin-1/2 részecske állapotát egy $2^N \times 2^N$ sűrűségmátrixszal reprezentáljuk. Az ilyen számítások azonban csak 10 – 14 részecskéig lehetségesek.

Új tudományos eredmények

1. Megvizsgáltuk, hogyan lehet összefonódottsági feltételeket létrehozni néhány többrészecske korrelációval. Jól ismert spinláncok Hamilton-operátoraival kaptunk ilyen kritériumokat [T1,T2]. Ha a Hamilton-operátor várható értéke kisebb, mint a klasszikus energiaminimum, akkor az állapot összefonódott. Ez lehetővé teszi az olyan hőmérséklet-

határok meghatározását, amelyek alatt a termikus egyensúlyban lévő rendszer biztosan összefonódott. A módszer előnye, hogy csak a kéttest korrelációk ismeretét igényli, és nem kell ismernünk magát a kvantumállapotot. Ez lehetővé teszi a fent említett hőmérsékleti határ kiszámítását nagy rendszerekben.

2. Megvizsgáltuk, hogyan lehet összefonódottságot detektálni GHZ-állapotok, a klaszterállapotok és a gráfállapotok közelében [T3,T4]. Egyszerű tanúoperátorokat mutattunk be, amelyek csupán két vagy három korrelációval összefonódottságot detektálnak. A tanúoperátorok egy része bármilyen összefonódottságot detektál. Emellett olyan tanúoperátorokat is bemutatunk, amelyek csak a valódi többtest-összefonódást érzékelik. Vagyis olyan állapotokat detektálnak, amelyekben minden részecske összefonódott a többivel. Ezeknek a tanúknak csak minimális kísérleti erőfeszítésre, azaz csak két helyi mérésre van szükségük. Robusztusak a zajjal szemben is, ezért kísérletileg alkalmazhatóak. Fotonokkal végzett kísérletekben használták őket.
3. Megvizsgáltuk, hogyan lehet detektálni összefonódást szimmetrikus Dicke-állapotok közelében. Az összefonódottsági kritérium kiértékeléséhez meg kell mérni a Dicke-állapothoz tartozó hűséget (fidelity), amely a Dicke-állapothoz tartozó projektor várható értéke [T5]. A módszer a következő módon működik. Ha a hűség nagyobb, mint egy általunk kiszámított határ, akkor a kvantumállapot valódi többtest-összefonódott. Nagy részecskeszám esetén a határ nagyon közel van az $1/2$ -hez. Tehát csak egy kicsit nagyobb hűséget kell elérnünk, mint $1/2$, és garantálhatjuk a valódi többtest-összefonódottságot. Példákat mutatunk be olyan összefonódási feltételekre is, amelyek csak kollektív méréseket igényelnek [T5,T6]. A módszereket fotonokkal végzett kísérletekben használták.
4. Megvizsgáltuk a permutációs szimmetria és az összefonódás kapcsolatát. Hatékony összefonódási kritériumokat mutattunk be a parciális transzponált pozitivitására alapozva. Ez a kritérium összefonódottsá-

got detektál, ha a sűrűségmátrix parciális transzpozíciója nem pozitív szemidefinit. Bebizonyítottuk, hogy a szimmetrikus állapotok esetében a kétrésű állapotnak pozitív parciális transzponáltja van akkor és csak akkor, ha a $\langle A \otimes A \rangle$ típusú korrelációk mind nemnegatívak [T7]. Ez a parciális transzponált (ami a kvantuminformációban megjelenő absztrakt koncepció) gyakorlati értelmezését adja, mivel összeköti a kéttest-korrelációkkal. Olyan szimmetrikus többrészecske állapotokat is bemutatunk, amelyek összefonódtak, de a parciális transzponáltjuk pozitív. Az ilyen állapotokat kötött összefonódottnak (bound entangled) nevezik, és a figyelem középpontjában állnak. Egy olyan egyszerű numerikus eljárást mutattunk be, amely qubitnél nagyobb dimenziójú részecskék esetén kétrésű kötött összefonódott állapotokat generál. Azt is megmutattuk, hogy vannak négy-qubit és öt-qubit összefonódott állapotok, amelyekre a parciális transzponált pozitív szemidefinit, minden bipartíció tekintetében.

5. Az állapot-tomográfiát vizsgáltuk sokrészecske rendszerben. A kvantumállapot szabadságfokainak száma exponenciálisan növekszik a részecskék számával, ami a teljes állapot-tomográfiát csak a kis rendszerekben teszi lehetővé. Bevezettük a permutáció-invariáns tomográfiát, amely csak a kvantumállapot permutációs invariáns részét méri [T8]. A mérések száma csak négyzetesen nő a kétállapotú részecskék számával. Ez lehetővé teszi a nagy rendszerek tomográfiájának elvégzését. Más módszerektől eltérően, nem feltételezzük, hogy a kvantumállapotnak valamilyen speciális tulajdonsága vagy szimmetriája lenne. A módszert fotonokkal végzett kísérletekben használták.
6. Megvizsgáltuk, hogyan lehet felismerni az összefonódást sokrészecske rendszerekben kollektív mérések segítségével. Találtunk olyan összefonódottsági kritériumokat, amelyek a szinglett állapothoz közel detektálnak összefonódottságot a kollektív impulzusmomentum komponensek varianciáival [T9]. Meghatároztuk a kétállapotú részecskék sokaságában kollektív mérésekkel összefonódottságot detektáló kritériumok teljes rendszerét. Ezek a kritériumok csak a kollektív impulzusmomentum-

komponensek várható értékeit és második momentumait ismerve detektálnak összefonódottságot [T10,T11]. A rendszer teljes, mivel megmutattuk, hogy nem lehet további hasonló kritériumokat találni. A módszert hideg gázokban használták.

7. Megvizsgáltuk a többtest-összefonódottság és a kvantummetrológia viszonyát. Megmutattuk, hogy teljes többtest-összefonódottság szükséges ahhoz, hogy elérjük a maximális érzékenységet lineáris interferométerekben [T12]. Azt is megmutattuk, hogy a k -részecskés összefonódottsággal rendelkező állapotok lehetővé teszik, hogy nagyobb metrológiai pontosságot érjünk el, mint $(k - 1)$ -részecskés összefonódottsággal rendelkező kvantumállapotokkal. Az összefonódottság és az egyetlen metrológiai feladat érzékenysége közötti összefüggés mellett az összefonódottság és több metrológiai feladatra vonatkozó átlagos érzékenység viszonyát is megvizsgáltuk. Vannak összefonódott kvantumállapotok, amelyek nem nyújtanak jobb érzékenységet, mint a szeparálható állapotok, ha csak egyetlen metrológiai feladatot vizsgálunk, de még mindig jobb átlagérzékenységet biztosítanak, ha több feladat érzékenységét vesszük tekintetbe.
8. Megmutattuk, hogyan lehet a gráfállapotokat detektáló Bell-egyenlőtlenségeket létrehozni. A gráfállapotok magukban foglalják a klaszterállapotokat és a GHZ állapotokat. Olyan egyenlőtlenségeket találtunk, amelyeknek qubitenként csak legfeljebb két különböző mennyiség mérésére van szüksége [T13]. Az állapotok egy része esetén (pl. klaszterállapotok) a Bell-egyenlőtlenségek sértésének mértéke gyorsan növekszik a részecskék számával.

A tézispontokhoz kötődő tudományos közlemények

- [T1] G. Tóth,
“Entanglement witnesses in spin models,”

- Phys. Rev. A **71**, 010301 (2005).
- [T2] G. Tóth and O. Gühne,
“Detection of multipartite entanglement with two-body correlations,”
Appl. Phys. B **82**, 237–241 (2006).
- [T3] G. Tóth and O. Gühne,
“Detecting genuine multipartite entanglement with two local measurements,”
Phys. Rev. Lett. **94**, 060501 (2005).
- [T4] G. Tóth and O. Gühne,
“Entanglement detection in the stabilizer formalism,”
Phys. Rev. A **72**, 022340 (2005).
- [T5] G. Tóth,
“Detection of multipartite entanglement in the vicinity of symmetric Dicke states,”
J. Opt. Soc. Am. B **24**, 275–282 (2007).
- [T6] G. Tóth, W. Wieczorek, R. Krischek, N. Kiesel, P. Michelberger,
and H. Weinfurter,
“Practical methods for witnessing genuine multi-qubit entanglement
in the vicinity of symmetric states,”
New J. Phys. **11**, 083002 (2009).
- [T7] G. Tóth and O. Gühne,
“Entanglement and permutational symmetry,”
Phys. Rev. Lett. **102**, 170503 (2009).
- [T8] G. Tóth, W. Wieczorek, D. Gross, R. Krischek, C. Schwemmer, and
H. Weinfurter,
“Permutationally invariant quantum tomography,”
Phys. Rev. Lett. **105**, 250403 (2010).

- [T9] G. Tóth,
“Entanglement detection in optical lattices of bosonic atoms with collective measurements,”
[Phys. Rev. A **69**, 052327 \(2004\)](#).
- [T10] G. Tóth,
C. Knapp, O. Gühne, and H. J. Briegel, “Optimal spin squeezing inequalities detect bound entanglement in spin models,”
[Phys. Rev. Lett. **99**, 250405 \(2007\)](#).
- [T11] G. Tóth,
C. Knapp, O. Gühne, and H. J. Briegel, “Spin squeezing and entanglement,”
[Phys. Rev. A **79**, 042334 \(2009\)](#).
- [T12] G. Tóth,
“Multipartite entanglement and high-precision metrology,”
[Phys. Rev. A **85**, 022322 \(2012\)](#).
- [T13] G. Tóth, O. Gühne, and H. J. Briegel,
“Two-setting bell inequalities for graph states,”
[Phys. Rev. A **73**, 022303 \(2006\)](#).

Hivatkozások

- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*, 10th ed. (Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2011).
- [2] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, „Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell’s inequalities,” [Phys. Rev. Lett. **49**, 91–94 \(1982\)](#).

- [3] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, M. Lewenstein, and A. Sanpera, „Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators,” [Phys. Rev. Lett. **92**, 087902 \(2004\)](#).
- [4] B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. S. Polzik, „Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects,” [Nature \(London\) **413**, 400–403 \(2001\)](#).
- [5] H. Häffner, W. Hänsel, C. Roos, J. Benhelm, M. Chwalla, T. Körber, U. Rapol, M. Riebe, P. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür, and R. Blatt, „Scalable multiparticle entanglement of trapped ions,” [Nature \(London\) **438**, 643–646 \(2005\)](#).
- [6] R. F. Werner, „Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model,” [Phys. Rev. A **40**, 4277–4281 \(1989\)](#).
- [7] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, „Quantum entanglement,” [Rev. Mod. Phys. **81**, 865–942 \(2009\)](#).
- [8] O. Gühne and G. Tóth, „Entanglement detection,” [Phys. Rep. **474**, 1–75 \(2009\)](#).
- [9] L. Pezzé and A. Smerzi, „Entanglement, nonlinear dynamics, and the heisenberg limit,” [Phys. Rev. Lett. **102**, 100401 \(2009\)](#).
- [10] G. Tóth and I. Apellaniz, „Quantum metrology from a quantum information science perspective,” [J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 424006 \(2014\)](#).
- [11] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, „Bell’s theorem without inequalities,” [Am. J. Phys. **58**, 1131–1143 \(1990\)](#).
- [12] H. J. Briegel and R. Raussendorf, „Persistent entanglement in arrays of interacting particles,” [Phys. Rev. Lett. **86**, 910–913 \(2001\)](#).